Épreuve de Maths	Royaume du Maroc	Examen National du
Filières : SMA - SMB	Ministère de l'Éducation Nationale	BACCALAURÉAT
Coefficient : 9	De la Formation professionnelle	Session Principale
Durée : 4 heures	de l'Eseignement supérieur & de la Recherche scientifique	Juin 2004

Exercice Numéro 1 : (03,00 points)

Soit n un entier naturel.

0,50 **1 a** Montrer l'implication suivante : $n\ impair \implies n^2 \equiv 1\,[8]$.

0,50 **b** Montrer l'implication suivante : $n\ pair \implies n^2 \equiv 4\,[8]\ \ ou\ \ n^2 \equiv 0\,[8]$.

0,50 **2 a** Prouver : $a,b,c\ impairs \implies (a^2+b^2+c^2)\ n'est\ pas\ un\ carré\ parfait$.

0,50 **b** Montrer que : $a,b,c\ impairs \implies 2(ab+bc+ac) \equiv 6[8]$.

On pourra remarquer : $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$.

0,50 **c** Prouver : $a,b,c\ impairs \implies 2(ab+bc+ac)\ n'est\ pas\ un\ carré\ parfait$

0,50 **d** Prouver : $a,b,c\ impairs \implies (ab+bc+ac)\ n'est\ pas\ un\ carré\ parfait$.

Exercice Numéro 2 : (03,50 points)

Rappel : $(\mathbb{R},+,\times)$ est un corps commutatif : $0_{\mathbb{R}} = 0$; $1_{\mathbb{R}} = 1$.

$(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire : $\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Soit : $E = \left\{ M(a) = \begin{pmatrix} a & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(a-\frac{1}{a}\right) \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} \quad ; \quad a \in \mathbb{R}^* \right\}$

Soit : $F = \left\{ N(a) = \begin{pmatrix} a & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(a-\frac{1}{a}\right) \\ -a\sqrt{3} & -a \end{pmatrix} \quad ; \quad a \in \mathbb{R}^* \right\}$

On considère l'application suivante : $\varphi \ :\ (\mathbb{R}^*,\times) \longmapsto (E,\times)$

$x \longmapsto M(x)$

0,75 **1 a** Montrer que : $\forall\,(a,b) \in \mathbb{R}^{2*}$; $M(a)\times M(b) = M(a\times b)$.

0,50 **b** Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{R}^*,\times)$ vers $(E,\times)$.

0,50 **c** En déduire la structure algébrique de l'ensemble $(E,\times)$.

0,50 **2 a** Montrer que : $\forall\,(a,b) \in \mathbb{R}^{2*}$; $N(a)\times N(b) = M\left(\frac{b}{a}\right)$.

0,75 **b** Montrer que $(G,\times)$ est un groupe. Avec $G = E \cup F$.

0,50 **c** Le groupe $(G,\times)$ est-il commutatif ?

■ Exercice Numéro 3 : (03,50 points)

0,75 **1** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation ainsi proposée : $z^2 + z + 1 = 0$.

Soit : $z = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$; $-\pi \leq \theta \leq \pi$ *et* $\theta \neq \frac{2\pi}{3}$ *et* $\theta \neq \frac{-2\pi}{3}$.

On pose : $z' = \dfrac{1}{z^2 + z + 1} = x + iy$; $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

0,75 **2** **a** Vérifier que : $1 + z + z^2 = z(1 + z + \bar{z})$.

0,75 **b** Déterminer le module et un argument de z' en fonction de θ.

0,75 **c** Montrer que : $x^2 + y^2 = (1 - 2x)^2$.

0,50 **d** En déduire que $M(z')$ décrivent une hyperbole qu'on devrait définir.

■ Exercice Numéro 4 : (10,00 points)

I Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x}$

Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(\mathcal{O}, \vec{i}, \vec{j})$ avec : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1cm$.

0,50 **1** Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$; $-\infty$; 0^- ; 0^+

0,50 **2** Étudier les variations de la fonction f .

0,50 **3** **a** Déterminer les branches infinies de la courbe $(\mathcal{C})$.

0,25 **b** Tracer la courbe $(\mathcal{C})$ dans le repère $(\mathcal{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

II Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie ainsi :

$$\begin{cases} u_{n+1} = (u_n)^2 f(u_n) = u_n\, e^{-u_n} \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

0,25 **1** Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $e^x \geq x + 1$.

0,25 **2** En déduire que : $(\forall x > 0)$; $x^2 f(x) \leq \dfrac{x}{x+1}$

0,50 **3** **a** Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $0 < u_n \leq \dfrac{1}{n+1}$

0,75 **b** Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente puis déterminer sa limite.

4 Soit la suite suivante : $v_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$; $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$

0,75 **a** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $v_n = \ln\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$

0,50 **b** Déterminer la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

III Soit F la fonction numérique définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$\begin{cases} F(x) = \displaystyle\int_{x^2}^{4x^2} f(t)\,dt \quad ; \quad \forall\, x > 0 \\ F(0) = 2\ln 2 \end{cases}$$

Soit $(\mathcal{C}_F)$ la courbe représentative de la fonction F dans un repère orthonormé $(\mathcal{O},\vec{\imath},\vec{\jmath})$ avec : $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 1cm$.

0,25 **1 a** Vérifier que : $(\forall\, x > 0)$; $\displaystyle\int_{x^2}^{4x^2} \left(\frac{1}{t}\right) dt = 2\ln 2$

0,50 **b** Montrer que : $(\forall\, t > 0)$; $-t < e^{-t} - 1 \leq 0$

0,50 **2 a** Montrer que : $(\forall\, x > 0)$; $-3x^2 \leq F(x) - 2\ln 2 \leq 0$.

0,25 **b** En déduire que F est dérivable à droite en zéro.

0,25 **3 a** Montrer que : $(\forall\, t \geq 1)$; $f(t) \leq e^{-t}$.

0,50 **b** En déduire la limite suivante : $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$

0,75 **4 a** Montrer que F est dérivable sur $]0,+\infty[$ puis calculer $F'(x)$.

0,50 **b** Dresser le tableau de variations de la fonction F.

0,50 **c** Tracer la courbe $(\mathcal{C}_F)$ dans le repère $(\mathcal{O},\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

5 Soit G la fonction numérique définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$G(x) = \int_{x}^{4x} e^{-t}\ln t\,dt$$

0,50 **a** Montrer que : $(\forall\, x > 0)$; $G(x) = F(\sqrt{x}) - e^{-4x}\ln(4x) + e^{-x}\ln x$.

0,50 **b** Calculer la limite suivante : $\lim\limits_{x\to0^+} \left(e^{-x} - e^{-4x}\right)\ln x$

0,25 **c** En déduire la limite suivante : $\lim\limits_{x\to0^+} G(x)$